

# Zur Expansion künstlicher, neutraler Metaldampfwolken in der Hochatmosphäre

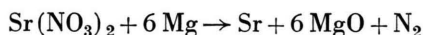
W. SMILGA

Max-Planck-Institut für Physik und Astrophysik, Institut für extraterrestrische Forschung

(Z. Naturforsch. 23 a, 417–423 [1968]; eingegangen am 16. Dezember 1967)

A two-phase-flow model for the expansion of an artificial metal vapour cloud in the upper atmosphere is considered, which may account for the very high expansion velocity and the shell structure of some experimental clouds.

Im Rahmen einer Versuchsserie des Institutes für extraterrestrische Forschung am Max-Planck-Institut für Physik und Astrophysik wurde am 3. 12. 64 in 385 km Höhe eine künstliche Metaldampfwolke mittels der explosionsartig verlaufenden Reaktion



erzeugt<sup>1, 2</sup>. Dabei beobachtete man eine unerwartet hohe Ausdehnungsgeschwindigkeit von 3,9 km/sec, sowie eine Kugelschalenstruktur der gasförmigen Sr-Komponente. (In den späteren Experimenten wurde Ba an Stelle des Sr verwendet.)

Wir beschreiben im folgenden ein einfaches hydrodynamisches Modell für die Anfangsphase der Expansion, das eine geeignet erscheinende Erklärung für die Beobachtungen liefert.

Die Wolke enthält sowohl gasförmige als auch kondensierte Reaktionsprodukte, letztere in Form kleiner Partikel; daher mußte ein Zweiphasenmodell zugrunde gelegt werden. Wegen des Fehlens einer vollständigen Theorie, die es gestattet, eine schnelle chemische Reaktion einschließlich der dabei auftretenden Verdampfungs-, Kondensations- und Diffusionsvorgänge zu behandeln, mußten wir uns mit einer drastisch vereinfachten Beschreibung der Reaktion begnügen. Diese Vereinfachung besteht darin, daß wir den tatsächlichen Reaktionsablauf durch einen solchen mit unendlich kurzer Reaktionsdauer ersetzen. Da hierdurch die Genauigkeit des Modells bereits erheblich begrenzt wird, erschien es konsequent, weiterhin nur diejenigen Vorgänge in das Modell einzubeziehen, die den dominierenden Beitrag zur Dynamik der Wolke liefern. Entsprechende Abschätzungen an Hand charakteristischer Zeitkonstanten zeigen, daß dann im Modell als Wechselwirkung zwischen beiden Phasen nur der Wärmeaus-

tausch durch Leitung und der makroskopische Impulsaustausch zu berücksichtigen sind, sofern wir von einem möglichen Materieaustausch zwischen beiden Phasen sowie von Turbulenzen absehen, wozu wir wegen rechnerischer Schwierigkeiten und des Fehlens empirischer Daten gezwungen sind.

Auf Grund dieses Modells können wir den Expansionsvorgang folgendermaßen beschreiben: Nachdem die Reaktionsprodukte den Behälter gesprengt haben, dehnt sich die gasförmige Komponente in das umgebende Vakuum aus und beschleunigt infolge der Reibung die kondensierte Komponente ebenfalls auf annähernd die Gasgeschwindigkeit. Dabei kühlt das Gas ab. Die entstandene Temperaturdifferenz zwischen Gas und Partikeln bewirkt einen Wärmestrom von der kondensierten zur gasförmigen Phase. Wegen der relativ hohen spezifischen Wärme des Partikelmaterials überwiegt die abgegebene Wärmeenergie die von den Partikeln aufgenommene (makroskopische) kinetische Energie. Daher nimmt die Energie der gasförmigen Komponente während der Expansion zu, wodurch ihre hohe Expansionsgeschwindigkeit erklärt wird. Die Kugelschalenstruktur ergibt sich dabei aus der Geschwindigkeitsverteilung der Gaskomponente.

## 1. Grundlegende Abschätzungen

### a) Definition der Anfangsphase

Die Anfangsphase soll dadurch gekennzeichnet werden, daß der Durchmesser der Wolke klein gegenüber der mittleren freien Weglänge in der umgebenden Atmosphäre ist. Diese liegt in 400 km Höhe in der Größenordnung von 50 km.

<sup>1</sup> H. FÖPPL, G. HAERENDEL, J. LOIDL, R. LÜST, F. MELZNER, B. MEYER, H. NEUSS u. E. RIEGER, Planet. Space Sci. 13, 95 [1965].

<sup>2</sup> H. FÖPPL, G. HAERENDEL, L. HASER, J. LOIDL, P. LÜTJENS, R. LÜST, F. MELZNER, B. MEYER, H. NEUSS u. E. RIEGER, Planet. Space Sci. 15, 357 [1967].



### b) Anfangswerte

Bei der genannten Reaktion werden etwa 1,7 kcal pro Gramm des Gemisches frei<sup>3</sup>. Bei Verwendung von Molwärmen, die einer Temperatur von 2300 °K entsprechen<sup>4</sup>, verteilt sich die freigesetzte Reaktionsenergie, sofern wir für alle Reaktionsprodukte die gleiche Anfangstemperatur voraussetzen, wie folgt:

Sr: 3,4%; N<sub>2</sub>: 7,2%; MgO: 89,4%.

Hieraus ist ersichtlich, daß die Wechselwirkung zwischen gasförmiger und kondensierter Komponente eine wichtige Rolle in der Dynamik der Wolke spielen muß, da erstere die Druckkräfte liefert, letztere als Energiespeicher anzusehen ist.

Es kann angenommen werden, daß das Reaktionsgemisch vollständig durchreagiert. Bis zu welchem Grad dies bei Beginn der Expansion (d. h. beim Platzen des Behälters) bereits geschehen ist, ist nicht bekannt. Es läßt sich lediglich eine obere Grenze von 0,02 sec für die Reaktionszeit angeben<sup>5</sup>. Nehmen wir eine unendlich kurze Reaktionsdauer an, so kommen wir auf eine Anfangstemperatur von etwa 7000 °K. Bei einer endlichen Reaktionsdauer wird diese Temperatur deshalb nicht erreicht, weil bereits während der Reaktion thermische Energie in (makroskopische) kinetische Energie umgewandelt wird. Wenn wir diese unrealistische Anfangstemperatur im weiteren zugrunde legen, so ist dies nur als ein formales Hilfsmittel zu verstehen, um der Modell-Wolke die richtige Anfangsenergie zuzuführen. Darüber hinaus kommt dieser fiktiven Temperatur keine physikalische Bedeutung zu, vielmehr wurden alle temperaturabhängigen Parameter für eine Temperatur von 2300 °K ermittelt. Insbesondere kann angenommen werden, daß das MgO in fester Form vorliegt. (Es wurden keine MgO-Banden beobachtet.)

Das Experiment ergab, daß nach einer Expansionszeit von 10 sec etwa 94% des Sr kondensiert waren<sup>6</sup>. Da auch hier genauere Daten fehlen, haben wir das Modell für zwei Extremfälle durchgerechnet, nämlich erstens für den Fall vollständig kondensierten Strontiums, in dem die Gasphase allein durch N<sub>2</sub>, und zweitens für den Fall vollständig verdampften Strontiums, in dem die kondensierte Phase allein durch MgO gebildet wird.

Wir wollen annehmen, daß die kondensierte Komponente aus Partikeln mit einheitlichem spezifischen Gewicht und einheitlichem Durchmesser von einigen 10<sup>-3</sup> cm besteht.

Der Einfachheit halber legen wir sphärische Symmetrie zugrunde.

### c) Transportvorgänge

Bei Nichtberücksichtigung von Kondensation, Verdampfung und Turbulenz haben wir hinsichtlich der Wechselwirkung innerhalb sowie zwischen kondensierter und gasförmiger Phase folgende Transportvorgänge zu betrachten:

1. Übertragung von Wärme durch Leitung und Strahlung.
2. Übertragung von kinetischer Energie durch Druck und Reibung.
3. Energiedissipation bei der Übertragung von kinetischer Energie.

Dabei ist jeweils noch zu unterscheiden, ob der betreffende Vorgang

- a) zwischen Gas und Partikeln,
- b) innerhalb der gasförmigen Komponente,
- c) innerhalb der kondensierten Komponente

abläuft. Jedem dieser Vorgänge ist eine charakteristische Zeitkonstante zugeordnet. Tragen mehrere Vorgänge zur Bestimmung einer Größe bei, so ermöglicht uns die Abschätzung der Zeitkonstanten, diejenigen Vorgänge zu vernachlässigen, deren Zeitkonstante wesentlich größer als die kleinste zur Diskussion stehende ist. Wir finden für den Druckausgleich im Gas, für die Wärmeleitung zwischen Gas und Partikeln und für die kinetische Wechselwirkung zwischen Gas und Partikeln Zeitkonstanten in der Größenordnung von 10<sup>-3</sup> sec. Auf diesen drei Wechselwirkungen beruht das im folgenden beschriebene Modell. Alle anderen Vorgänge haben um mindestens den Faktor 10 größere Zeitkonstanten.

Die Vernachlässigung der Wärmestrahlung begrenzt die Gültigkeit des Modells auf eine Expansionszeit von etwa 10<sup>-2</sup> sec. Zu diesem Zeitpunkt wird die Wolke optisch dünn (bezogen auf Absorption der Strahlung durch die Partikel). Die Strahlungsverluste bewirken dann ein „Einfrieren“ der erreichten Geschwindigkeitsverteilung.

<sup>3</sup> Siehe I. c. <sup>1</sup>.

<sup>4</sup> LANDOLT-BÖRNSTEIN, Zahlenwerte und Funktionen, Band II, 4. Teil, Berlin-Göttingen-Heidelberg 1961.

<sup>5</sup> Siehe I. c. <sup>1</sup>.

<sup>6</sup> P. LÜTJENS, Diplomarbeit, Universität München 1966.

## 2. Das Modell

### a) Die Grundgleichungen

Unser Gleichungssystem ist eine Verallgemeinerung des von RANNIE<sup>7</sup> für eine stationäre Strömung benutzten Systems.

Im folgenden kennzeichnet  $d$  eine vollständige Ableitung in einem mit der Strömung mitbewegten Koordinatensystem (substantielle Ableitung),  $\partial$  eine gewöhnliche partielle Ableitung.

*Beziehungen zwischen den Partialdichten.* — Es seien  $\varrho_1$ ,  $\varrho_2$ ,  $\varrho_3$  die Dichten von Sr, N<sub>2</sub> und MgO bezogen auf die Volumeneinheit der Wolke. Bei gasförmigem Sr ist die Partialdichte der Gaskomponente

$$\varrho_g = \varrho_1 + \varrho_2,$$

die der kondensierten Komponente

$$\varrho_t = \varrho_3.$$

Bei kondensiertem Sr gilt

$$\varrho_g = \varrho_2 \quad \text{und} \quad \varrho_t = \varrho_1 + \varrho_2.$$

Die Gesamtdichte ist

$$\varrho = \varrho_1 + \varrho_2 + \varrho_3.$$

Die in der Zustandsgleichung der Gaskomponente wesentliche Dichte  $\varrho_0$  ist auf das Eigenvolumen des Gases bezogen. Ist  $\varrho_s$  die Dichte des Partikelmaterials, so gilt

$$\varrho_0 = \varrho_g \varrho_s / (\varrho_s - \varrho_t). \quad (1)$$

*Thermische Zustandsgleichung für die Gaskomponente.* — Wir verwenden die ideale Gasgleichung

$$p = \varrho_0 R T / \mu. \quad (2)$$

Bei kondensiertem Sr ist  $\mu$  das Molekulargewicht von N<sub>2</sub>. Ist Sr gasförmig, so gilt

$$\mu = \frac{(\varrho_{10} + \varrho_{20}) \mu_1 \mu_2}{\varrho_{10} \mu_2 + \varrho_{20} \mu_1},$$

wobei  $\mu_1$  und  $\mu_2$  die Molekulargewichte,  $\varrho_{10}$  und  $\varrho_{20}$  die analog zu  $\varrho_0$  definierten Dichten von Sr und N<sub>2</sub> sind.

*Gleichung für die Zustandsänderung.* —  $s$  sei die Entropie des Gases pro Masseneinheit. Im Falle einer adiabatischen Expansion der Gaskomponente

in das Vakuum gilt

$$ds/dt = 0.$$

Da jedoch das Gas mit den Partikeln im Wärmekontakt steht, haben wir statt dessen

$$ds = \delta Q_g / T_g,$$

wobei  $\delta Q_g$  die Wärmemenge ist, die dem Massenelement des Gases zugeführt wird, und  $T_g$  die Gas-temperatur bedeutet. Da wir Energiedissipation vernachlässigen, ist  $\delta Q_g$  gleich der von den Partikeln abgegebenen Wärmemenge  $-\delta Q_t$ , also

$$ds = -\delta Q_t / T_g.$$

Wenn wir uns jetzt auf die Volumeneinheit beziehen, erhalten wir

$$\varrho_g T_g \frac{ds}{dt} = -n \frac{dQ_p}{dt},$$

wobei  $n$  die Zahl der Partikel pro Volumeneinheit und  $Q_p$  der Wärmehalt einer Partikel ist. Mit

$$n = \frac{\varrho_t}{\frac{4\pi}{3} a^3 \varrho_s}, \quad Q_p = \frac{4\pi}{3} a^3 \varrho_s c_s T_t$$

( $a$  der Partikelradius,  $c_s$  die spezifische Wärme des Partikelmaterials,  $T_t$  die Partikeltemperatur) ergibt sich

$$\varrho_g T_g \frac{ds}{dt} = -\varrho_t c_s \frac{dT_t}{dt}.$$

Setzen wir  $ds = c_v \frac{dp}{p} - c_p \frac{d\varrho_0}{\varrho_0}$

und  $T_g$  aus (2) ein, so erhalten wir schließlich

$$\frac{dp}{dt} = \frac{c_p}{c_v} \frac{p}{\varrho_0} \frac{d\varrho_0}{dt} - \frac{c_s R}{c_v \mu} \frac{\varrho_t \varrho_0}{\varrho_g} \frac{dT_t}{dt}. \quad (3)$$

*Gleichung für den Wärmeaustausch.* — Integrieren wir die Wärmeleitungsgleichung

$$\operatorname{div}(\kappa \operatorname{grad} T) = c \varrho \frac{\partial T}{\partial t} \quad (4)$$

über das Volumen eines im Gas ruhenden Teilchens, so erhalten wir unter der Voraussetzung homogener Temperatur im Teilchen

$$\int \kappa \operatorname{grad} T \cdot \vec{df} = \frac{4\pi}{3} a^3 \varrho_s \varrho_s \frac{\partial T_t}{\partial t},$$

wobei links das Integral über die Oberfläche des Teilchens steht. Wegen seiner großen Wärmekapazität können wir das Teilchen als konstante Wärme-

<sup>7</sup> W. D. RANNIE, in: Detonation and Two-Phase Flow, Progress in Astronautics and Rocketry; Vol. 6, Academic Press, New York-London 1962.

quelle betrachten und für das umgebende Gas die stationäre Wärmeleitungsgleichung verwenden. Wir erhalten so näherungsweise für die linke Seite

$$\int \kappa \operatorname{grad} T \cdot d\vec{f} = -\kappa (T_f - T_g) \cdot 4\pi a,$$

wobei  $\kappa$  jetzt die Wärmeleitfähigkeit des Gases ist. Bewegt sich das Teilchen gegen das Gas oder ist die freie Weglänge vergleichbar mit dem Partikelradius, so ist  $\kappa$  durch einen Faktor  $f_\kappa$  zu korrigieren, der von KAVANAU<sup>8</sup> experimentell bestimmt wurde. Somit bekommen wir die folgende Gleichung für die Temperatur der kondensierten Komponente:

$$\frac{dT_f}{dt} = -\frac{3\kappa}{a^2 \varrho_s c_s f_\kappa} (T_f - T_g). \quad (5)$$

*Die Bewegungsgleichungen.* — Zu bestimmen sind die Gasgeschwindigkeit  $u$  und die Partikelgeschwindigkeit  $v$ . Als erste Gleichung dient uns die Eulersche Gleichung

$$\varrho_g \frac{du}{dt} + \varrho_f \frac{dv}{dt} + \frac{\partial p}{\partial r} = 0; \quad (6)$$

$r$  ist die radiale Koordinate der Wolke. Die zweite Gleichung erhalten wir aus der Stokesschen Formel

$$6\pi a \eta (u - v) \quad (7)$$

( $\eta$  ist die Viskosität des Gases), indem wir sie entsprechend zu (4) durch einen Faktor  $f_d$  korrigieren. Außer der Kraft (7) wirkt noch der Druckgradient im Gas direkt auf die Teilchen. Wir erhalten

$$\frac{4\pi}{3} a^3 \varrho_s \frac{dv}{dt} = 6\pi a \frac{\eta}{f_d} (u - v) - \frac{4\pi}{3} a^3 \frac{\partial p}{\partial r}$$

oder

$$\frac{dv}{dt} = \frac{9\eta}{2a^2 \varrho_s f_d} (u - v) - \frac{1}{\varrho_s} \frac{\partial p}{\partial r}. \quad (8)$$

Die Korrekturfaktoren wurden aus RANNIE<sup>7</sup> übernommen.

*Massenerhaltung.* — Außer den bereits aufgeführten Gleichungen gilt für das Gas und die kondensierte Komponente je eine Kontinuitätsgleichung, die die Massenerhaltung beschreibt.

### b) Lagrangesche Formulierung

Zur numerischen Lösung der Modellgleichungen wurde ein Differenzenverfahren verwendet. Ver-

suche, die Gleichungen in der Eulerschen Formulierung in Differenzengleichungen umzusetzen, schlugen fehl, da die in substantiellen Zeitableitungen auftretenden Terme

$$u \cdot \frac{\partial}{\partial r} \dots$$

zur Vermeidung von Instabilitäten an der Stelle  $r$  nicht durch um  $r$  symmetrische Ausdrücke approximiert werden dürfen<sup>9</sup>. Bei Unsymmetrien führten jedoch die Wechselwirkungsterme zu starken Oszillationen des numerischen Fehlers und diese wiederum zu einer extrem ungünstigen Stabilitätsbedingung für das Verfahren. In der Lagrangeschen Formulierung entfällt diese Komplikation, da hier die substantielle Zeitableitung gleich der partiellen ist.

In der Lagrangeschen Formulierung wird die Koordinate  $r$  durch eine Hilfskoordinate ersetzt, die so gewählt wird, daß sie für ein mit der Strömung mitbewegtes Volumenelement eine zeitliche Konstante ist. Da wir es mit einer Zweiphasenströmung zu tun haben, müssen wir zwei Hilfskoordinaten einführen,  $L$  für die gasförmige und  $Q$  für die kondensierte Komponente.  $r$  wird jetzt eine Funktion von  $L$  und  $t$  bzw. von  $Q$  und  $t$ ; für erstere behalten wir die Bezeichnung  $r$  bei, letztere nennen wir  $q$ . Es gilt natürlich

$$r(L, t) = q(Q, t), \quad (9)$$

wenn sich  $L$  und  $Q$  auf den gleichen Ort beziehen.  $L$  und  $Q$  werden implizit durch

$$L^3 = \frac{3}{\varrho_g^0} \int_0^{r(L,t)} \varrho_g(\xi) \xi^2 d\xi \quad (10)$$

$$\text{und} \quad Q^3 = \frac{3}{\varrho_f^0} \int_0^{q(Q,t)} \varrho_f(\xi) \xi^2 d\xi \quad (11)$$

definiert.  $\varrho_g^0$  und  $\varrho_f^0$  sind die (homogenen) Anfangsdichten. Die Integrale sind der von der Kugeloberfläche  $L$  bzw.  $Q = \text{const}$  eingeschlossenen Masse der betreffenden Komponente proportional und daher zeitunabhängig. Folglich gilt für die substantielle Zeitableitung einer Größe  $G(L, t)$

$$\frac{dG}{dt} = \frac{\partial G}{\partial t} + \frac{\partial G}{\partial L} \frac{dL}{dt} = \frac{\partial G}{\partial t}.$$

<sup>8</sup> Siehe l. c. <sup>7</sup>.

<sup>9</sup> R. D. RICHTMYER, Difference Methods for Initial-Value Problems (Interscience Tracts in Pure and Applied Mathematics — Tract 4), New York-London 1957.

Zur Zeit  $t=0$  sind  $L$  und  $Q$  identisch mit der Koordinate  $r$ . Aus (10) folgt für festes  $t$

$$r^2 dr = \frac{\varrho_g}{\varrho_g^0} L^2 dL$$

also

$$\varrho_g = \varrho_g^0 \frac{L^2}{r^2} \left( \frac{\partial r}{\partial L} \right)^{-1} \quad (12)$$

und entsprechend

$$\varrho_t = \varrho_t^0 \frac{Q^2}{q^2} \left( \frac{\partial q}{\partial Q} \right)^{-1}. \quad (13)$$

(12) und (13) sind die Kontinuitätsgleichungen für  $\varrho_g$  und  $\varrho_t$ .

Wir werden natürlich die das Gas charakterisierenden Größen nach Möglichkeit als Funktionen von  $L$  und  $t$ , die die kondensierte Komponente betreffenden als Funktionen von  $Q$  und  $t$  definieren. Diese Abhängigkeit läßt sich allerdings nicht überall aufrechterhalten: In den Wechselwirkungstermen müssen sich die Gas- und Partikelgrößen auf den gleichen Ort beziehen ( $r=q$ ). Diesem entsprechen aber im allgemeinen verschiedene Werte von  $L$  und  $Q$ . Wir finden in diesem Fall die zueinander gehörigen Werte von  $L$  und  $Q$  durch Auflösen von (9) nach  $L$  oder  $Q$ . Ein so gewonnenes  $Q$  ist dann eine Funktion von  $L$  und  $t$ , die wir  $\bar{Q}(L, t)$  nennen. Die entsprechende,  $L$  zugeordnete Funktion ist  $\hat{L}(Q, t)$ . Setzt man nun etwa  $Q = \bar{Q}(L, t)$  in eine Größe  $G(Q, t)$  ein, so wird dadurch eine neue Funktion von  $L$  und  $t$  definiert, die wir durch einen Querstrich von der ursprünglichen unterscheiden, z. B.

$$\bar{\varrho}_t(L, t) \equiv \varrho_t(\bar{Q}(L, t), t)$$

und entsprechend

$$\hat{\varrho}_g(Q, t) \equiv \varrho_g(\hat{L}(Q, t), t).$$

Wir kommen nun auf unsere Modellgleichungen zurück und setzen (8) in (6) sowie (5) und (2) in (3) ein. Führen wir dann die Lagrangeschen Koordinaten ein, so erhalten wir für das folgende Gleichungssystem für die sechs Unbekannten  $u, v, r, q, p, T_t$ :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = - \frac{\bar{\varrho}_t}{\varrho_g} \frac{9\eta}{2a^2 \varrho_s f_d} (u - \bar{v}) - \frac{\varrho_s - \bar{\varrho}_t}{\varrho_g^0 \varrho_s} \frac{r^2}{L^2} \frac{\partial p}{\partial L}, \quad (14)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{9\hat{\eta}}{2a^2 \varrho_s \hat{f}_d} (\hat{u} - v) - \frac{\varrho_t}{\varrho_t^0 \varrho_s} \frac{q^2}{Q^2} \frac{\partial \hat{p}}{\partial Q}, \quad (15)$$

$$\frac{\partial r}{\partial t} = u, \quad \frac{\partial q}{\partial t} = v, \quad (16, 17)$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{c_p}{c_v} \frac{p}{\varrho_0} \frac{\partial \varrho_0}{\partial t} + \frac{3\kappa}{a^2 c_v f_s} \frac{\bar{\varrho}_t}{\varrho_g \varrho_s} \left( \frac{\varrho_0 R}{\mu} \bar{T}_t - p \right), \quad (18)$$

$$\frac{\partial T_t}{\partial t} = - \frac{3\hat{\kappa}}{a^2 \varrho_s c_s \hat{f}_s} (T_t - \hat{T}_g). \quad (19)$$

Dazu kommen die Hilfsgleichungen (1), (2) (nach  $T_g$  aufgelöst), (9), (12) und (13). Die Abhängigkeit der einzelnen Gleichungen von  $L$  oder  $Q$  richtet sich nach der natürlichen Abhängigkeit der links vom Gleichheitszeichen stehenden Größe.

### c) Das Differenzensystem

Zur Aufstellung des Differenzensystems führen wir ein zweidimensionales  $(n, j)$ -Gitter ein. Wir schreiben abgekürzt für eine Größe  $G(t, L)$

$$G(n \cdot \Delta t, j \cdot \Delta L) \equiv G(t^n, L_j) \equiv G_j^n.$$

$n$  ist ganzzahlig;  $j$  ist für die Größen  $u, v, r, q$  ganzzahlig, dagegen halbganzzahlig für die Größen  $p, \varrho_g, \varrho_t, \varrho_0, T_g, T_t$ . Zeitliche Differentialquotienten an der Stelle  $(n, j)$  wurden durch Differenzenquotienten zwischen den Gitterpunkten  $(n+1, j)$  und  $(n-1, j)$ , räumliche Differentialquotienten durch Differenzenquotienten zwischen  $(n, j+1/2)$  und  $(n, j-1/2)$  ersetzt. In den Gleichungen der Form

$$\frac{G_j^{n+1} - G_j^{n-1}}{2 \Delta t} = G_j^n \dots + \dots$$

ersetzen wir außerdem aus Stabilitätsgründen  $G_j^n$  durch

$$\frac{G_j^{n+1} + G_j^{n-1}}{2}.$$

Die Werte von  $\hat{L}$  an der Stelle  $Q_j$  [Auflösung von Gl. (9) nach  $L$ ] wurden durch Aufsuchen der beiden durch die Bedingung

$$r(t^n, L_k) \leq q(t^n, Q_j) < r(t^n, L_{k+1})$$

räumlich zugeordneten  $L_k$  und  $L_{k+1}$  und anschließende lineare Interpolation bestimmt. Anschließend wurden die gedachten Größen  $\hat{G}$  ebenfalls durch lineare Interpolation gewonnen. Entsprechendes gilt für die quer gestrichenen Größen.

Wir rechnen mit

$$\Delta L = \Delta Q = 1 \text{ cm} \quad (0 \leq L, Q \leq 15 \text{ cm});$$

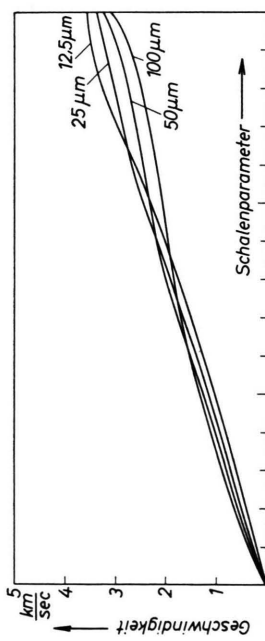


Abb. 1. Zweiphasenmodell Sr gasförmig. Abhängigkeit der Geschwindigkeitsverteilung des Gases bei  $t = 10$  msec vom Partikelradius  $a$ .

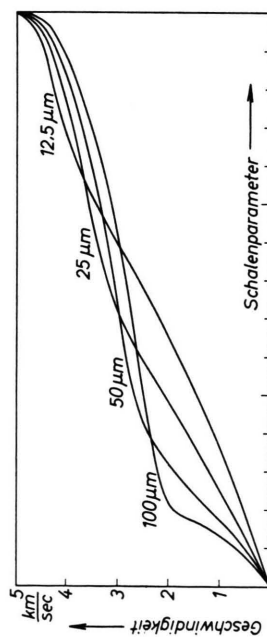


Abb. 2. Zweiphasenmodell Sr kondensiert (sonst wie bei Abb. 1).

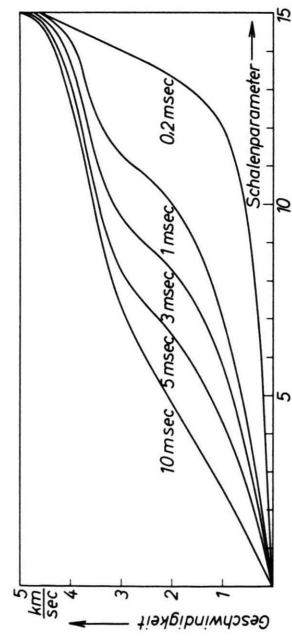


Abb. 3. Zweiphasenmodell Sr kondensiert. Zeitliche Entwicklung der Geschwindigkeitsverteilung des Gases;  $a = 25 \mu\text{m}$ .

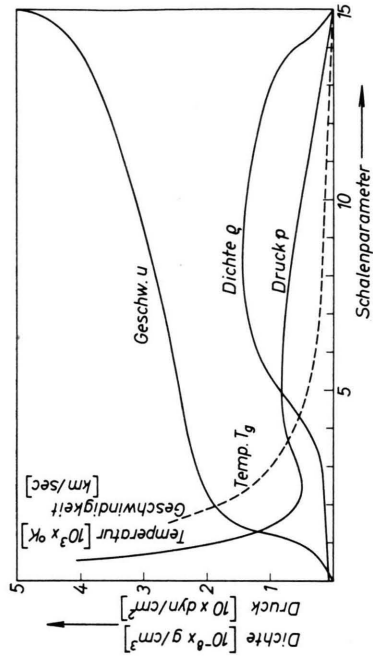


Abb. 4. Zweiphasenmodell Sr kondensiert. Verteilungsfunktionen des Gases bei  $t = 10$  msec;  $a = 100 \mu\text{m}$ .

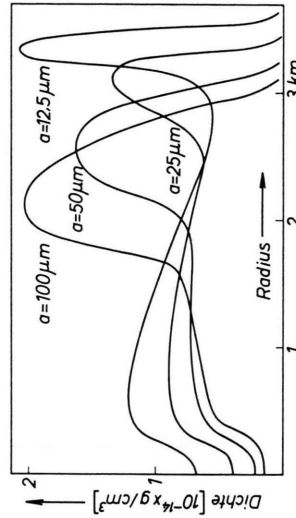


Abb. 5. Zweiphasenmodell Sr gasförmig. Extrapolierte Gasdichte bei  $t = 1$  sec (unter Annahme einer von  $t = 10$  msec an wechselwirkungsfreien Strömung).

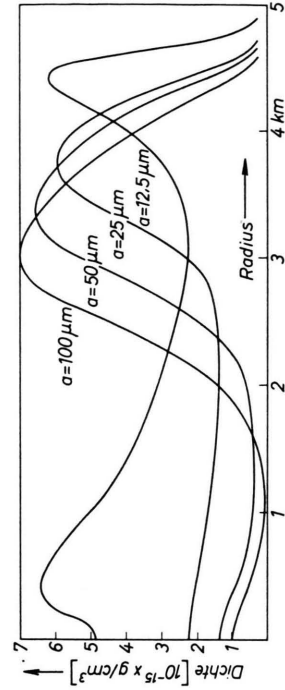


Abb. 6. Zweiphasenmodell Sr kondensiert. Extrapolierte Gasdichte bei  $t = 1$  sec (sonst wie bei Abb. 5).

$\Delta t$  variierte während der Rechnung von  $10^{-6}$  bis  $64 \cdot 10^{-6}$  sec. Die Rechenzeit für die ersten  $10^{-2}$  sec der Expansion betrug auf einer IBM 7090 etwa 2,7 min. Zur Konvergenzkontrolle wurde nach jeweils 100 Zeitschritten die Gesamtenergie der Wolke, die in unserem Modell eine zeitliche Konstante sein muß, berechnet. Es ergaben sich Abweichungen von maximal 7%, die bei Verfeinerung des Netzes gegen Null gingen. In dem für das Ergebnis wesentlichen Bereich der Wolke ( $0 \leq L \leq 13$  cm) änderten sich dabei die Werte nur um maximal 1%.

### 3. Ergebnisse

Das Modell wurde für gasförmiges und kondensiertes Sr mit je vier verschiedenen Partikelradien  $a = 12,5 / 25 / 50 / 100 \mu\text{m}$  und einer Anfangsdichte von  $1,44 \text{ g/cm}^3$  entsprechend einem Gesamtgewicht von  $20,37 \text{ g}$  durchgerechnet.

Abb. 1 und 2 zeigen die Geschwindigkeitsverteilung des Gases bei  $t = 10 \text{ msec}$  in Abhängigkeit vom Partikelradius, aufgetragen gegen die Hilfskoordinate  $L$  (Schalenparameter). In Abb. 1 (gasförmiges Sr) ist die Abhängigkeit von  $a$  gering. Der Grund ist, daß wegen der relativ hohen Gasdichte die kinetische Kopplung zwischen beiden Phasen sehr stark ist. Abb. 2 (kondensiertes Sr) läßt bei einem wesentlich größeren Einfluß des Partikelradius eine schon in Abb. 1 angedeutete charakteristische Form der Kurven erkennen: Von  $L = 0$  ausgehend folgt auf ein relativ steil ansteigendes Stück ein Bereich mit geringerer Steigung. Die Stelle, an der die Kurve in den flachen Teil übergeht, fällt mit der Grenze der langsameren kondensierten Komponente zusammen. Diese Kurvenform führt zur Ausbildung einer Kugelschalenstruktur, da im Bereich der geringeren Steigung die Wolke weniger rasch expandiert und hier darum eine vergleichsweise hohe Dichte beibehält.

In Abb. 3 ist die zeitliche Entwicklung der Geschwindigkeitsverteilung dargestellt. Die Kurve für  $t = 0,2 \text{ msec}$  entspricht im wesentlichen noch der Lösung, die man für eine Einphasenströmung erhält. Die darauffolgende Ausbildung des flachen Teils der Kurve wird verständlich, wenn man bedenkt, daß die Gasvolumina um so länger der wegen der Nachheizung sehr starken Beschleunigung im Inneren der kondensierten Phase unterliegen, je kleiner ihr  $L$ -

Wert ist. Unter geeigneten Umständen würden also nachfolgende Volumina bei Heraustreten aus der kondensierten Komponente eine höhere Geschwindigkeit erreichen als die vorhergehenden, wenn dieses nicht durch einen dabei entstehenden positiven Druckgradienten außerhalb der kondensierten Phase verhindert würde. Ein solcher positiver Druckgradient ist in Abb. 4 zwischen  $L = 2,5$  und  $L = 4,5$  zu erkennen, in der wir Druck, Geschwindigkeit, Dichte und Temperatur der Gasphase für  $t = 10 \text{ msec}$ ,  $a = 100 \mu\text{m}$  aufgetragen haben (Sr kondensiert). Bei  $L \approx 1$  findet man den starken Druckgradienten, der sich am Rande der kondensierten Komponente eingestellt hat. Die Dichte im Äußeren der Wolke ist bereits höher als im Inneren.

In Abb. 5 und 6 sind auf  $t = 1 \text{ sec}$  extrapolierte Dichteverteilungen gegen den Radius der Wolke aufgetragen, wie man sie erhält, wenn man zur Zeit  $t = 10 \text{ msec}$  die Wechselwirkung „abschaltet“. Zu diesem Zeitpunkt sind 10 bis 25% der in der kondensierten Komponente enthaltenen thermischen Energie auf das Gas übertragen worden. Diese Extrapolation ist qualitativ brauchbar, weil sowohl wegen der abnehmenden Dichten als auch wegen des erwähnten „Einfrierens“ alle Wechselwirkungen für  $t > 10 \text{ msec}$  so gering werden, daß sie die Geschwindigkeitsverteilung nicht mehr wesentlich beeinflussen. Die Dichtemaxima am Rande der Wolke sind stark ausgeprägt. Ferner zeigt sich bei den meisten Kurven ein im allgemeinen schwächeres Maximum in der Mitte der Wolke. Man liest aus Abb. 5 und 6 ebenfalls die Expansionsgeschwindigkeiten ab, die mit 2,8 bis 4,7 km/sec (entnommen beim Abfall der Dichte auf die Hälfte des äußeren Maximums) gut zu der Beobachtung passen.

Zur Rechtfertigung der hydrodynamischen Näherung sei noch bemerkt, daß die mittleren freien Weglängen bei  $t = 10 \text{ msec}$  kleiner als 1 cm sind. Die kleinste charakteristische Länge der Wolke – der Partikelradius ist in diesem Zusammenhang nicht charakteristisch, weil wir Korrekturfaktoren verwendet haben – ist die Halbwertsbreite des äußeren Dichtemaximums. Diese ist bei  $t = 10 \text{ msec}$  in allen Fällen größer als 1 m.

Ich danke Herrn Prof. Dr. R.-H. GIESE und Herrn Prof. Dr. R. LÜST sehr herzlich für die Anregung und Unterstützung dieser Arbeit.